Einige der Abbildungen zur Unterrichtsreihe

(aus Copyright-Gründen hier nur Namen und Hinweise)

1. Streitwagen mit Pharao Setos I (6-Speichen-Rad; Amun-Tempel, Karnak, ca. 1300 v. Chr.)
   Link: http://www.nefershapiland.de/Biografie%20Sethos%20I.htm sowie viele Google-Bilder zu „Streitwagen mit Pharao Setos I“
2. Merkblatt „Das regelmäßige Sechseck“
3. Übung zum Kreise zeichnen (Figuren 356-361 aus H. v. Baravalle: Geometrie als Sprache der Formen. Stuttgart, 3. Aufl. 1982) *)
4. Eine Übung im Winkelzeichnen (→ Spiralformen)
5. Nautilusschnecke in Durchleuchtung / Teil des Fruchtstandes einer Sonnenblume (aus H. Kükelhaus: Urzahl und Gebärde. Berlin 1934)
   Vgl. ersatzweise etwa http://de.wikipedia.org/wiki/Perlboote#mediaviewer/Datei:NautilusCutawayLogarithmicSpiral.jpg bzw. http://de.wikipedia.org/wiki/Sonnenblume#mediaviewer/Datei:Pflanze-Sonnenblume1-Asio.JPG
6. Merkblatt „Andere regelmäßige Vielecke“
7. Explanation of the quadrant (aus D. E. Smith: History of Mathematics, Part II (1925), S. 354 f. – s. https://archive.org/details/historyofmathema031897mbp bzw. der Seitenaufruf https://archive.org/stream/historyofmathema031897mbp#page/n369/mode/2up/search/Explanation .
8. Höhenmessung (ebenda, S. 355) / Jost Bürgis Triangulationsinstrument (online unter: http://www.presidentsmedals.com/Entry-11410)
9. Merkblatt „Wichtiges Grundwissen“ (Winkelmessung, Mittelsenkrechte)
10. Spiegelbild beim Taj (Tadsch) Mahal (online z. B. unter http://picturescollections.com/wp-content/uploads/2012/02/Amazing-Taj-mahal-Pictures2.jpg)
11. Grundformen für Stein-Pflasterungen. S. z. B. Google-Bilder zu „Pflasterungen“
12. Merkblatt „Parkette/Ornamente“
13. Die zur Audienzhalle führende Treppe des Palastes des Darius in Persepolis (Online s. z. B. https://oi.uchicago.edu/gallery/palace-darius#3D3_72dpi.png oder http://tehran.stanford.edu/Images/Ancient/persepolis1.gif oder http://www.historvius.com/images/original/Persepolis-629.jpg
14. Merkblatt „Das Koordinatensystem“
15. Bilder zu (exotischen) Koordinatensystemen – s. Google-Bilder zu „Growth and Form“
16. Dürer: Menschenköpfe im Quadrat – s. GoogleBilder zu „Dürer Proportionen“
17. Satz- und Wortlängen bei berühmten Schriftstellern. (Leider habe ich die Quelle der

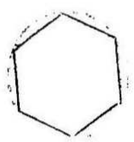
damals gezeigten Punktwolke Wortlänge versus Satzlänge bei diversen deutschen Schriftstellern vergessen. Einen Ersatz könnte man aus diesem Vortrag gewinnen: https://www.linguistik.hu-berlin.de/institut/professuren/korpuslinguistik/lehre/alte_jahrgaenge/ss-2007/vl-korpuslinguistik/pdf/golcher.pdf)
Oder zum Erarbeiten: http://www.woerter-zaehlen.de/

18. Eine Übung mit Escher-Figuren

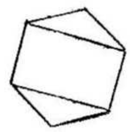
*) (Zu 3.) Als gute Ersatzvorlagen können Dürers Kreismuster dienen, die es frei gibt unter http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6b/Fotothek_df_tg_0000699_Geometrie_%5E_Kreis_%5E_Muster.jpg

7. Klasse - Schuljahr 82/83 — Das regelmäßige Sechseck

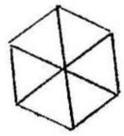
Definition: Ein Sechseck heißt regelmäßig, wenn die Seiten untereinander gleich groß sind und die Winkel ebenfalls.



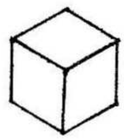
Ein regelmäßiges Sechseck hat sechs verschiedene Symmetrieachsen. Sie verlaufen alle durch einen gemeinsamen Punkt, den Mittelpunkt des regelmäßigen Sechsecks. Er ist von allen Ecken gleich weit entfernt, darum kann man dem regelmäßigen Sechseck einem Kreis "umbeschreiben". Die Radien zu den Ecken bilden miteinander Winkel von je 60°; und man kann die Ebene mit gleichgroßen regelmäßigen Sechsecken "pflastern". Daher zerfällt das regelmäßige Sechseck durch die Radien in sechs gleichseitige Dreiecke; und die Winkel an den Ecken betragen immer 120°.



Es gibt mehrere Möglichkeiten, regelmäßige Sechsecke genau zu konstruieren. Einige davon:
- Zeichne einen Kreis und trage den Radius außen sechsmal ab!
- Zeichne einen 30°-Winkel und in die eingeschlossene Fläche an einen der Schenkel einen entgegengesetzten 30°-Winkel! Trage dann rechtwinklig an die Enden des entstandenen Dreiecks die kürzere Dreiecksseitenlänge an!...
- Zeichne einen 30°-Winkel und in die eingeschlossene Fläche an einen der Schenkel einen 120°-Winkel, an den anderen Schenkel einen rechten Winkel!...



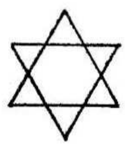
- Zeichne einen 120°-Winkel und trage auf beiden Schenkeln vom Scheitelpunkt aus die gewünschte Seitenlänge ab!...
- Zeichne einen 30°-Winkel und schneide einen Schenkel parallel zum anderen Schenkel ab! Vom Ende des abgeschnittenen Schenkels zeichne eine Senkrechte (Lot) zum anderen Schenkel! Spiegelt man den 30°-Winkel an dieser Senkrechten, so erhält man das 30°-Dreieck der zweiten Konstruktion. Man kann dann wie oben fortfahren.



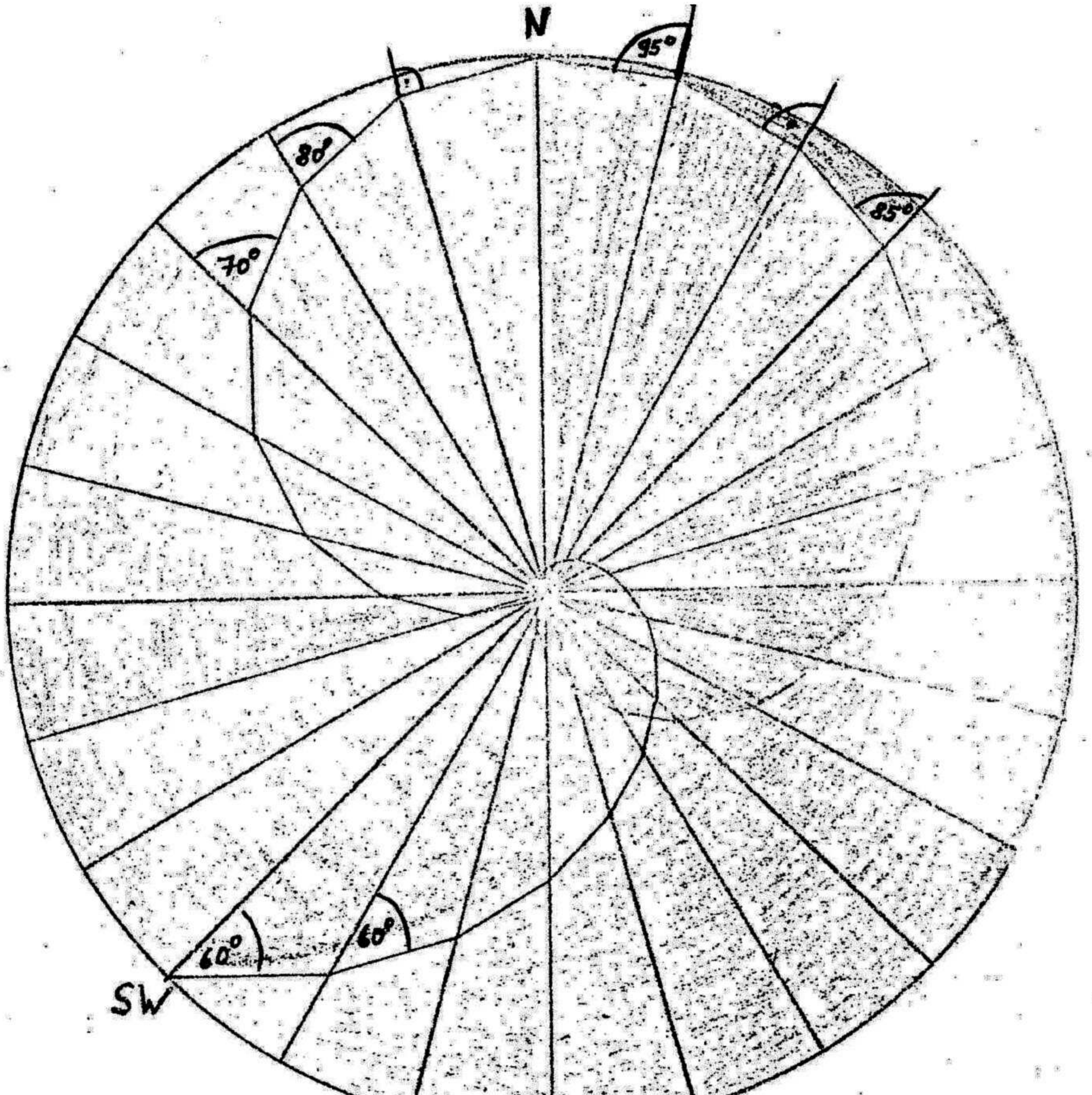
- Falte ein gleichseitiges Dreieck (= Konstruktion entsprechender Spiegelachsen) und lege dann die drei Ecken zur "Mitte" um!

Die schönste und genaueste Konstruktion ist die erstgenannte. Sie war schon den ägyptischen Pyramidenbauern vor 4 000 Jahren vertraut. Man nimmt an, daß aus dieser Sechsteilung des Vollwinkels (360° entsprachen vermutlich einem Jahr) das babylonische 60iger-System stammt, das wir noch für unsere Uhrzeit benutzen.

Davidstern , Hexagramm, Siegel Salomons...!



König David (um -1000) vereinigte Judäa und Israel zu einem Reich; sein Sohn Salomo führte das neue Reich zu kultureller Blüte und gilt als Verkörperung von Reichtum und vor allem Weisheit. Ihnen schrieb man daher das Hexagramm (= Sechszeichen) zu, das als Verschmelzung zweier gleichseitiger Dreiecke die Verbindung von sichtbarer und unsichtbarer Welt, von Himmel und Erde symbolisierte. Im Mittelalter und schon im antiken Griechenland dachte man sich die Welt aus vier (später fünf) Elementen zusammengesetzt: Feuer (🜂), Luft (🜁), Erde (🜃) und Wasser (🜄), wobei Feuer und Wasser etwas Strebendes, Luft und Erde eher etwas Ruhendes an sich haben sollten. Die Alchemisten suchten nach der Verschmelzung dieser Gegensätze sowohl in gedanklicher als auch in körperlicher Hinsicht; das Hexagramm kennzeichnete dieses Ziel, den "Stein der Weisen" (die Golderzeugung) zu finden. Im Hinduismus symbolisieren das aufstrebende Dreieck das männliche, kraftvolle Prinzip (Linga), das auf die Spitze gestellte Dreieck Weiblichkeit, Geborgenheit und Gebärkraft (Yoni). Die Verbindung beider gilt als Zeichen der Weisheit und Vollkommenheit. Es liegt vor allem den Meditationszeichen, den Yantras, zugrunde, die die Einheit einer Gottheit mit Brahma vor dem Ursprung der vielgestaltigen Welt darstellen. Die Flagge des Staates Israel zeigt heute den Davidsstern, der als Symbol des Judentums gilt und im Hitler-Reich zur Judenverfolgung und -ermordung half.



Eine Übung im Winkel-Zeichnen

Nach dem Sechseck und Davidsstern mit der wichtigen Sechsteilung des Kreises wurden auch andere regelmäßige Vielecke angesprochen und zur Winkelmessung benutzt. Neben dem gleichseitigen Dreieck (drei 60°-Winkel, drei Symmetrieachsen) und dem Quadrat (vier rechte Winkel, vier Symmetrieachsen, senkrechte und halbierte Diagonalen) sind nun vor allem die Fünfecke, Siebenecke usw. interessant. Wir können dieses Thema leider nicht ausschöpfen; uns dienen die regelmäßigen Vielecke vor allem zur Veranschaulichung und Einübung der Grundbegriffe. Ein paar Hinweise können aber nicht schaden:

Regelmäßiges Fünfeck (Pentagon) und regelmäßiger Fünfstern (Pentagramm):

Nach dem Sechseck mit seiner Beziehung zur 60-iger-Teilung von Winkeln, Stunden usw. enthält vor allem das regelmäßige Fünfeck sehr viel tiefsinnige Mathematik. Soweit man heute weiß, haben die Pythagoräer, Mitglieder eines um 500 v. Chr. in Süditalien von Pythagoras von Samos gegründeten Geheimbundes, zuerst die Geheimnisse des Fünfsterns entdeckt und daher das Pentagramm als Erkennungszeichen auf ihrer Kleidung getragen. Sie fanden auch schon heraus, wie man mit den Seilspannermethoden (ohne Geodreieck, mit Zirkel und Kantholz) völlig genaue Pentagramme zeichnen kann - und das ist gar nicht einfach! Das eigentliche Geheimnis liegt aber in der unendlichen Wiederholung immer kleinerer Pentagramme in den Diagonalen der Mittelfiguren: Sie führten Hippasos von Metapont um 450 v. Chr. zur Entdeckung ungewöhnlicher Zahlen (Irrationalzahlen - "unsagbare" Zahlen - sie werden in Klasse 9 behandelt), die für die weitere Entwicklung der Mathematik entscheidend werden sollten.

Neben den geheimnisvollen Zahlenverhältnissen finden sich im Pentagramm aber auch besonders schöne Teilverhältnisse, die vor allem die Künstler lange gereizt haben. Man baute Tempel, später auch Bürgerhäuser nach den Maßverhältnissen des "goldenen Schnittes"; viele Maler befaßten sich mit mathematischen Gesetzmäßigkeiten einer besonders ausgewogenen Bildaufteilung nach Art des Pentagrammes; und viele der alten Kirchen haben Grundrißbestandteile von regelmäßigen Vielecken. (Ein Lehrbuch der Geometrie, eines der ersten in deutscher Sprache, stammt von Albrecht Dürer aus dem Jahre 1525 und behandelt neben der Perspektive für Maler vor allem die regelmäßigen Vielecke ausführlich.)

Wie schon beim Sechsstern erwähnt, hatten die Figuren, Namen und Dinge bis zum ausgehenden Mittelalter für die Menschen eine viel engere Beziehung miteinander als heute; und so hatten natürlich auch solche Zeichen wie das Pentagramm ihre magischen Bedeutungen als Beschwörungssymbole. Der Fünfstern hieß im Mittelalter "Drudenfuß", er symbolisierte die Abwehr von Druden, das sind Quälgeister im altindischen Volks-(aber)glauben. Man glaubte, der Teufel wäre zu bannen, wenn man ein Pentagramm in einem Zug an die Haustüren oder in den Sand zeichnete. (Auch in Goethes Faust-Drama ist davon die Rede.) Manchmal sah man in den fünf Zacken ein Symbol für die fünf heiligen Wunden Christi (alte Madonnenbilder oder Kreuzigungsszenen). Hexerische Geheimbünde benutzen dieses Zeichen bis in unsere Tage als Zaubermittel, sich die Elementargeister untertan zu machen. Ein breitbeinig stehender Mensch mit abwärts ausgestreckten Armen zeige, daß der Mensch solche Kräfte besitze... Na ja... (Immerhin befindet sich das amerikanische Verteidigungsministerium in einem Haus, dessen Grundriß ein regelmäßiges Fünfeck darstellt. Man hört also auch heute noch wichtiges vom "Pentagon"!) Andere Beziehungen stellen Sinnbilder fünfblättriger Pflanzen(symbole) her (Rose, Lilie, Weinstock) oder Verschmelzungen von (Weisheits-) Dreiecken oder den Buchstaben A in allen fünf Richtungen (Freimauerer: der große Architekt = Pentagramm) usw.

Über die folgenden Themen solltest Du jetzt Bescheid wissen. Es handelt sich um geometrisches Grundwissen, ohne das man nicht weit kommt.

- Wie zeichnet man ein genaues regelmäßiges Sechseck? Was versteht man darunter? Gibt es andere Sechsecke? Welche Winkel treten auf? Welcher Zusammenhang besteht mit den Kreisradien? Wo treten gleichseitige Dreiecke auf?
- Winkel: Vollwinkel, rechter Winkel, gestreckter Winkel, spitzer Winkel, stumpfer Winkel; Zeichnung von Winkeln zwischen 0^o und 360^o, Messung derartiger Winkel (mit dem Geodreieck); Scheitelwinkel, Nebenwinkel; Herkunft der 360^o-Zählung; Markierung: 1. Schenkel, Scheitelpunkt, 2. Schenkel (entgegen dem Uhrzeigersinn).

> MERKE: Winkelmessung und -zeichnung: 0-Punkt in den Scheitelpunkt, 1. Schenkel durch die Skala, 2. Schenkel auf die Zeichenkante!
>
> Winkel über 180^o mißt und zeichnet man, indem man gestreckte Winkel in Abzug bringt.

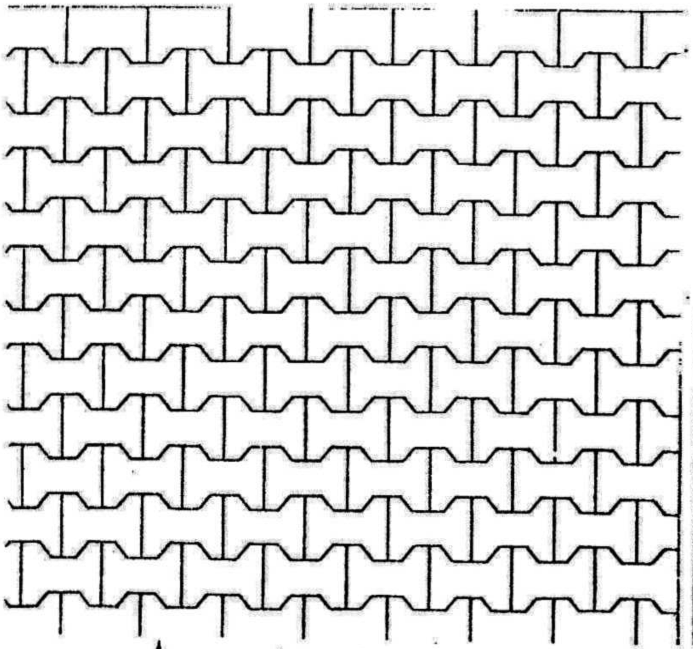
- Formen: gleichschenkliges Dreieck, gleichseitiges Dreieck, Quadrat, Rechteck, regelmäßiges Vieleck, unregelmäßiges Vieleck, Davidstern, Pentagramm (= Fünfstern), Kreis, Strecke, Strahl, Gerade.
- Namen: Diagonale, Radius, Durchmesser, Ecke, Seite, Basis (= Grundseite), Schenkel, Scheitelpunkt, Mittelpunkt, Mittelsenkrechte, Symmetrie(achse), Spiegelung, Fixpunkt.
- Kreise: zeichnen können; Zusammenhang mit dem Sechseck (Blumenmuster); Abtrag von Entfernungen ohne festgelegte Richtung: alle Kreispunkte von einem festen Punkt gleich weit entfernt; Symmetrieachsen.
- Zweikreisfigur (Buch, Kap. 3.2): Mittelsenkrechte konstruieren (Zirkel und auch mit dem Geodreieck); Symmetriemöglichkeiten; Dreieck mit drei gegebenen Seitenlängen konstruieren können; Vorhersage, ob zwei Kreise mit gegebenen Mittelpunkten und Radien null, einen oder zwei Punkte gemeinsam haben werden; Kreismittelpunkt finden.

> MERKE: Die Mittelsenkrechte einer Strecke sammelt alle Punkte, die von den Enden der Strecke gleich weit entfernt sind. Es ist die zweite Symmetrieachse der Strecke.

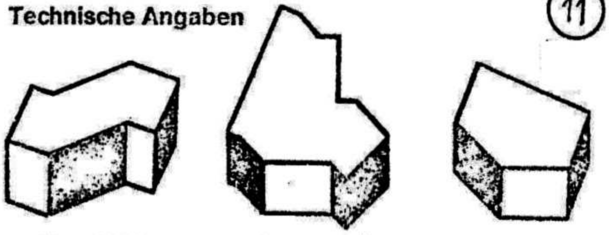
- Ein regelmäßiges Vieleck (z.B. Fünfeck - mit vorgegebener Seitenlänge bzw. in einen Kreis) zeichnen können; auftretende Winkel angeben können.
- Einen Punkt P (ein Dreieck ABC) an einer Geraden g spiegeln können (zeichnerisch; Verfahren beschreiben können); Fixpunkte dieser Spiegelung kennen; das Verhalten von Längen, Geradlinigkeit, Winkeln und Drehsinn bei einer Spiegelung kennen und beschreiben können.

MERKE: Überprüfe Dein Wissen an dieser Liste! Notiere Dir Deine Fragen und Schwierigkeiten, die Du dabei hast!

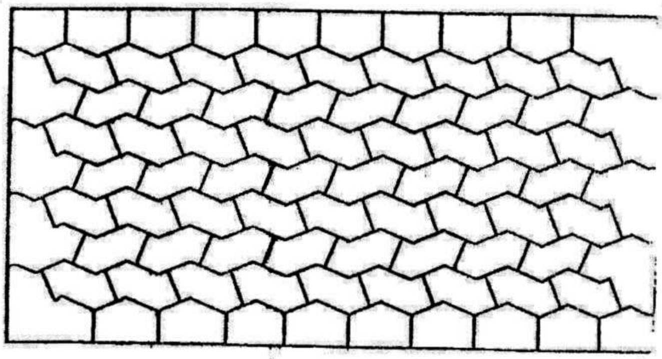
→ Dies ist Deine Mathematik-Hausaufgabe.

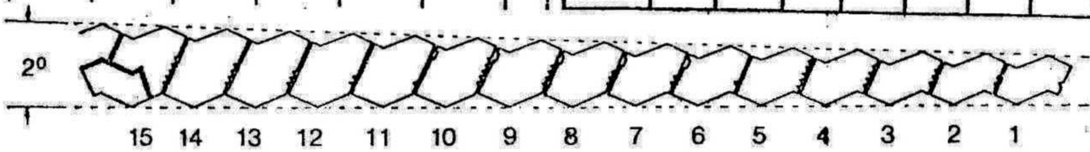


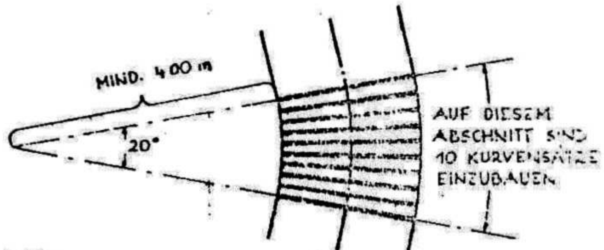
Technische Angaben

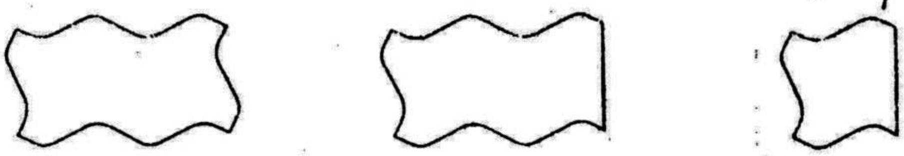


Normalstein Randstein Abschlußstein

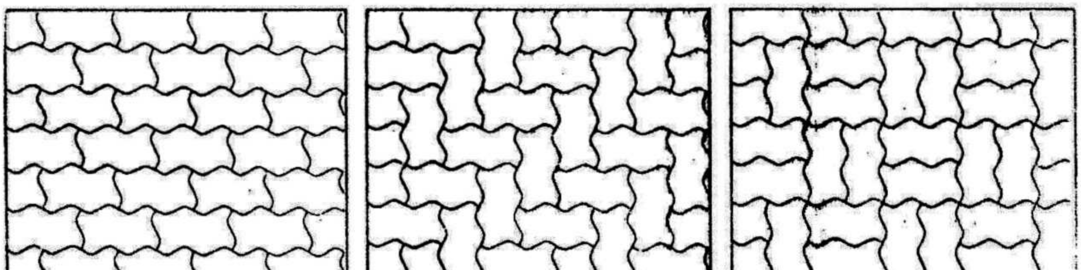




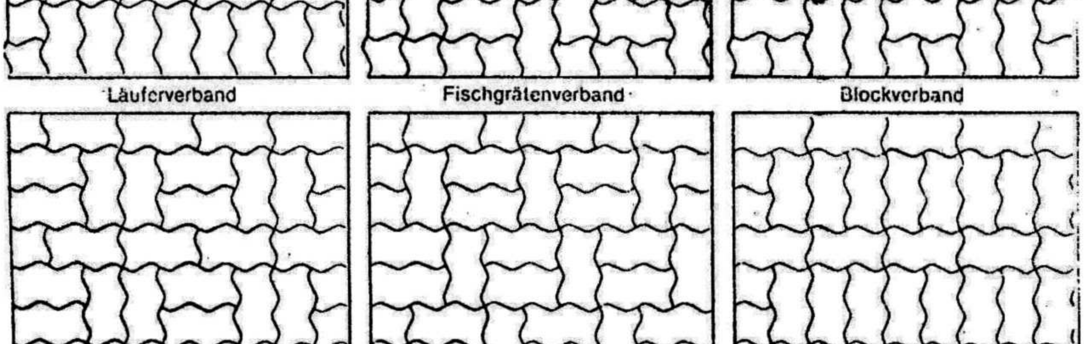




WL-Normalstein WL-Randstein (ganz) WL-Randstein (halb)



Läuferverband Fischgrätenverband Blockverband



Mit Parketten, Pflasterungen oder symmetrischen Mustern mit regelmäßigen Wiederholungen, also Ornamenten, haben sich die altgriechischen Mathematiker vermutlich nicht befaßt. Die ornamentale Kunst erreichte schon bei den Ägypern eine frühe Blüte, später vor allem bei den Arabern und Mauren. So gilt die Alhambra von Granada - im 13. Jahrhundert während der arabischen Besetzung erbaut - als Wunderwerk ornamentaler Kunst. Die islamischen Künstler neigten zu solchen geometrisch-regelmäßigen Motiven, weil ihnen ihr Glaube strikt verbot, Lebewesen darzustellen. Erst 1891 fand der russische Kristallograph Fedorov heraus, daß es genau 17 verschiedene Ornamenttypen gibt. Zur Überraschung der Wissenschaftler waren diese Ornamenttypen sämtlich in den Ornamenten von Granada vertreten!

Eng verwandt mit den Wiederholungen der Ornamente sind die der Parkette oder Pflasterungen. Mit ihnen hat sich wohl zuerst der berühmte deutsche Astronom Johannes Kepler um 1611 befaßt. Besonders in seinem Werk über die "Harmonie der Welt" entwarf er sehr fantasievolle Parkette aus regelmäßigen Vielecken. Vor etwa 100 Jahren wurde das Thema wieder aktuell, weil sich die Kristallkunde (neuerdings die sogenannte Festkörperphysik) an die mikroskopische Struktur der Stoffe heranarbeitete, wo es um regelmäßige räumliche Pflasterungen mit symmetrischen Körpern geht. Über die ebenen Parkette aus Drei- oder Vierecken wußte man rasch vollständig Bescheid. Aus kongruenten Vielecken mit sieben oder mehr Ecken kann man nur dann Parkette herstellen, wenn einspringende Ecken vorkommen - das ist nur selten wirklich interessant. Merkwürdig ist aber, daß man bis heute nicht vollständig über die Möglichkeiten der Parkettierung aus kongruenten Fünf- oder Sechsecken Bescheid weiß.

Der niederländische Künstler M. C. Escher (1898 - 1972) hat vollendete Parkette aus Lebewesen entworfen und ist damit weltberühmt geworden. Die Verschmelzung von mathematischer Symmetrie mit lebensvoller Gestaltung lag ihm als Inbegriff harmonischer Vollendung am Herzen - dieselbe Idee, die auch Kepler verfolgt hatte! Wir befassen uns hauptsächlich mit den Parketten, weil man an ihnen sehr viele Zusammenhänge zwischen Formen und Winkeln bzw. Flächeninhalten erkennen kann. Man muß allerdings genau hinsehen und die Beobachtungen sorgfältig begründen, wobei Spiegelungen, Halbdrehungen und Parallelverschiebungen die wichtigsten Werkzeuge sind. Und: Parkette sind auch schön!

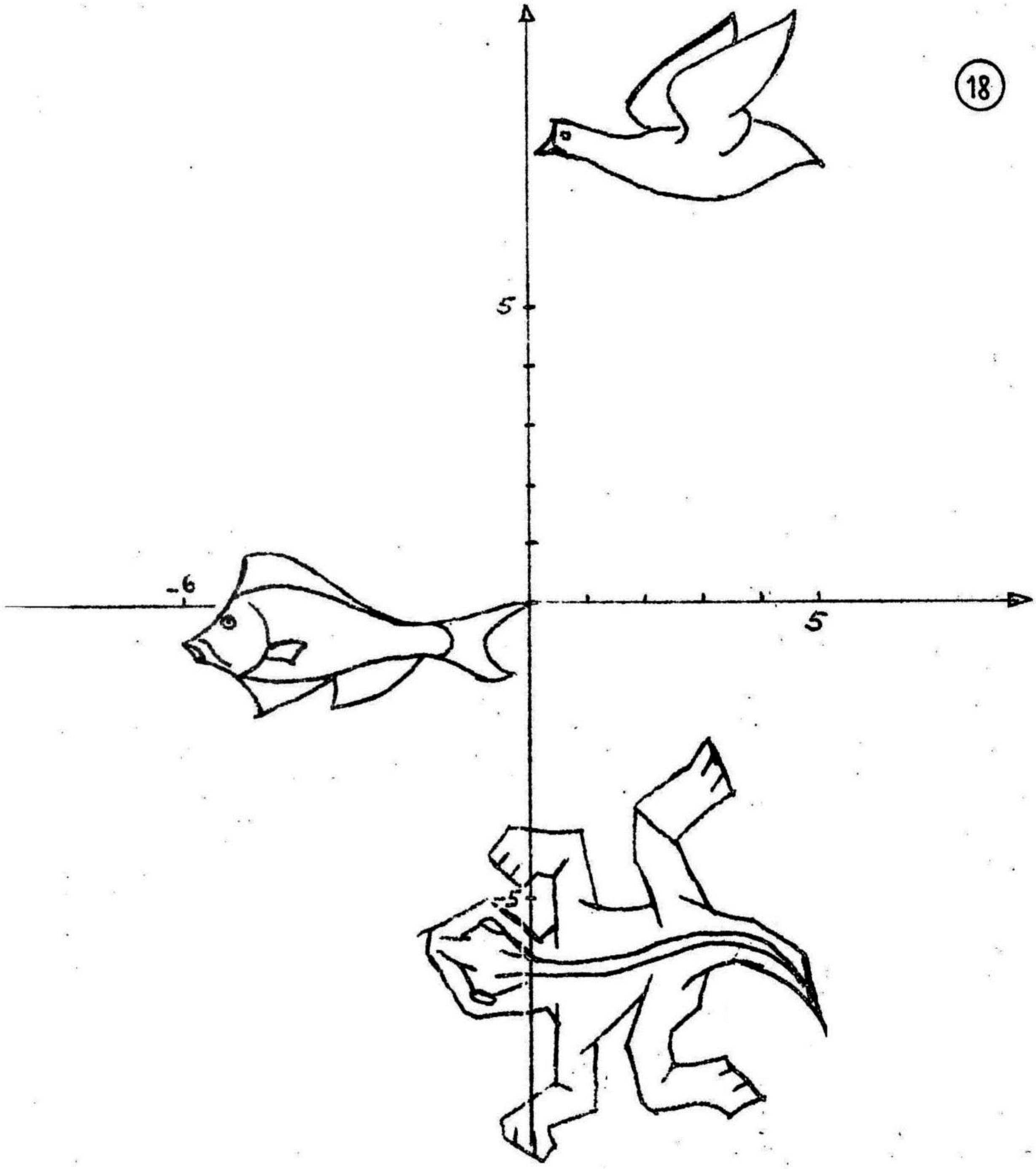
Es gab Zeiten, da spielte die Mathematik weder im Alltag noch in den Wissenschaften eine ernsthafte Rolle - so mancher sehnt sich danach noch heute. Um 1500 aber gerieten die Dinge so sehr in Bewegung, daß alte und neue mathematische Methoden dringend not taten: Ausdehnung der Seefahrt (Kolumbus 12.10.1492), Weltreisen (Marco Polo, 13. Jh.), Buchdruck mit beweglichen Typen (Gutenberg, 1455), Religionsstreitereien und -verfolgungen (Luther, 1517), Maschinen (Windmühlen, Pumpwerke, Papiermühlen, Seilzugmaschinen, Treträder, Kräne, Fördermaschinen, Schleifmaschinen), Utopien (Leonardo da Vinci, gest. 1519 : Fallschirme, Flugmaschinen, Unterseeboote, Wagen ohne Pferdeantrieb; Thomas Morus, gest. 1535: Utopia als Gelehrtenstaat), Wasser- und Festungsbau, Schiffs- und Bergbau, Alchimie (Suche nach dem "Stein der Weisen", Verwandlung niederer Metalle in Gold), medizinische Chemie (Paracelsus=Bombastus von Hohenheim, gest. 1541), Kopernikus (gest. 1543), Fallgesetze (Galilei, 1604), Planetengesetze (Kepler, 1609 u. 1619), Pendeluhr (Huygens, 1656)... All das forderte ein ganz neues Denken in Bewegungen, das der Geometrie der Alten fremd war.

Welche Anstrengungen man schon damals auf eine technische Grundlagenforschung verwandte, belegt die Gründung der berühmten Sternwarte von Greenwich durch den britischen König 1675. Sie erhielt den Auftrag, Methoden zur genauen Bestimmung der geographischen Länge auf hoher See zu entwickeln - ein Problem, das erst Mitte des 18. Jhs. von Harrison durch den Bau hinreichend genauer Schiffschronometer befriedigend gelöst werden konnte. Die antiken Astronomen Hipparchos (Insel Rhodos) und Ptolemäos (Alexandria) hatten schon, ausgehend von ihren Wohnorten, Ortsangaben nach Länge und Breite (Ost/West bzw. Nord/Süd) aufgezeichnet; und Heron (Alexandria) und nach ihm die römischen Feldmesser legten im Gelände Parallelstrecken quer zu einer sogenannten Standlinie fest, um die zu vermessenden Flächen besser in Dreiecke oder Trapeze aufteilen zu können. Schließlich verwandten auch bedeutende Maler und Architekten im 16. Jh. (Renaissance) Koordinatennetze, um Längen- und Flächenverhältnisse maßstabgerecht abzubilden. Die Festlegung des Nullmeridians durch den Ort der neuen Greenwicher Sternwarte zeigt nur zu deutlich, in welchen weltweiten Größenordnungen man inzwischen zu denken, reisen und messen gewohnt war, und daß dafür ein weltumspannendes Bezugsnetz nötig war.

Die Mathematik spielte in dieser rasanten Entwicklung eine entscheidende Rolle. Die Ausweitung des Fernhandels, das Aufblühen des Bankwesens (Fugger, 15. und 16. Jh.) und der Städte machten ein bescheidenes Maß an Rechenkenntnissen wünschenswert; und so gab es bald neben den Kloster(latein)schulen hier und dort städtische Schulen, an denen man Dinge praktischerer Art (Rechnen, Schreiben, Handwerkliches, Deutsch usw.) lernen konnte. Berühmte Rechenmeister wie Chr. Rudolff (gest. ca. 1545) oder Adam Riese (gest. 1559) lehrten Regeln für das Zahlenrechnen und bereiteten so den Boden für die Buchstabenrechnung des François Viète (gest. 1603), ohne die die neuzeitliche Mathematik nicht weiter als die griechische gekommen wäre. Man muß nämlich wissen, daß die antike Mathematik der Griechen nur in geometrischen Vorstellungen arbeitete und daß erst die Chinesen, Inder und Araber die hohe Kunst schwierigerer Zahlenrechnungen beherrschten und dazu auch negative Zahlen sowie das Dezimalsystem einführten. Obwohl diese Kenntnisse im Rechnerischen schon im 12. und 13. Jh. über das maurische Spanien ins Ausland vermittelt worden waren, setzten sie sich erst im 16. Jh. bei den Kaufleuten und Forschern durch.

So kam es, daß die bedeutendste mathematische Neuerung erst spät (1637) gefunden wurde - dann allerdings von mehreren Mathematikern nahezug gleichzeitig: Galilei in Italien nahm alte Arbeiten von N. Oresme über Bewegungsabläufe neu auf und schuf das Weg-Zeit-Diagramm. René Descartes und Pierre (de) Fermat benutzten waagerechte und dazu senkrechte Strecken, um Kurven beweglich zu erzeugen und durch Gleichungen zu beschreiben. Isaak Newton schuf schließlich 1676 in einer Arbeit über Kurven dritter Ordnung das Koordinatensystem. Er benutzte auch negative Koordinaten und nannte das Achsenkreuz "cartesisches Koordinatensystem".

18



a) Wohin müssen Auge A, Schwanzspitze S und rechte Flügelspitze F der Gans wandern, damit eine lückenlose „Pflasterung" der Koordinatenebene entstehen kann?

b) Wo könnten das nächste Fischauge FA, seine linke untere Flossenspitze FS und die obere Schwanzspitze hinwandern?

↑
FP

(c) Kann man die Ebene allein mit Fröschen pflastern?

diese „Frösche" sind Lurche!